УДК 330.46 (075.8)

Е.В. Аксенюшкина
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация

А.В. Аксенюшкин
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация

ОПТИМИЗАЦИИ РЕКЛАМНОЙ СТРАТЕГИИ КОМПАНИИ

Аннотация. В статье исследуется проблема численного решения вспомогательных задач метода игольчатой линеаризации для задач оптимального управления с функциональными ограничениями. Для их решения предлагается специальный метод, построенный на основе метода параметризации. Реализация предлагаемого подхода показана для задачи оптимизации рекламной стратегии фирмы. С помощью предлагаемой процедуры построена оптимальная рекламная стратегия компании, которая дает возможность таким образом распределить средства на рекламу, чтобы через определенный период времени была получена максимальная прибыль от реализации рекламируемого продукта.

Ключевые слова. Численный метод, эффективность метода, процедура улучшения.

Информация о статье. Дата поступления: 21 мая 2020 г.

E.V. Aksenyushkina
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation

A.V. Aksenyushkin
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation

OPTIMIZATION OF THE COMPANY'S ADVERTISING STRATEGY

Abstract. The article deals with the problem of numerical solution of auxiliary problems of the needle linearization method for optimal control problems with functional constraints. A special method based on the parameterization method is proposed to solve these problems. The implementation of the proposed approach is shown for the problem of optimizing the company's advertising strategy. With the help of the proposed procedure, the optimal advertising strategy of the company is built, which makes it possible to distribute funds for advertising in such a way that after a certain period, the maximum profit from the sale of the advertised product is obtained.

Keywords. Numerical method, the efficiency of the method, the process of improvement.

Article info. Received 21 May 2020.

Рассмотрим интегральную задачу

$$\int_T g_0(u(t),t)dt \to \min, \qquad u \in V, \tag{1}$$

$$\int_T g_i(u(t),t)dt = a_i, \qquad i = \overline{1,m},$$

$$V = \{u \in L_\infty^r(T):\ u(t) \in U, \quad t \in T\}.$$

Перепишем задачу (1), с учетом переменных

$$y_i(t) = \int_{t_0}^{t} g_i(u(\tau),\tau)d\tau, \qquad i = \overline{0,m}.$$

Приходим к следующей оптимизационной задаче

$$\dot{y}_i(t) = g_i(u,t), \quad y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{0,m},$$

$$y_0(t_1) \to \min, \quad y_i(t_1) = a_i, \quad i = \overline{1,m},\ u \in V.$$

Введем множество достижимости построенной системы $Y \subset R^{m+1}$ в момент времени t_1, тогда задачу можно записать в конечномерной форме

$$y_0 \to \min, \quad y_i = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad y \in Y. \tag{2}$$

Воспользуемся методом параметризации для численного решения задачи (2) [1,2].

Пусть $y^* = (y_1^*, y_0^*,..., y_m^*)$ — решение задачи (2). Поставим вспомогательную задачу, используя функцию специального вида с параметром β

$$S(y,\beta) = (y_0 - \beta)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - a_i)^2,$$

$$S(y,\beta) \to \min, \qquad y \in Y. \tag{3}$$

Пусть $y(\beta) = (y_0(\beta), y_1(\beta),..., y_m(\beta))$ — решение этой задачи. Определим минимальное значение параметра, при котором значение функции $S = (y, \beta) = 0$, то есть

$$\beta_* = \min\{\beta:\ S(y(\beta),\beta) = 0\}.$$

Связь между задачами (2), (3) вполне очевидна:

$$y_i^* = y_i(\beta_*), \quad i = \overline{0,m}.$$

Значение неизвестного параметра β_* будем находить опираясь на последовательность β_l, $l = 0,1,...$ с условиями

$$\beta_l \le \beta_{l+1} \le \beta_*, \qquad \beta_l \to \beta_*, \qquad l \to \infty .$$

Таким образом, приходим к простейшей задачи на поиск β_0

$$y_0 \to \min, \quad y \in Y \quad (\int_T g_0(u(t),t)dt \to \min, \quad u \in V).$$

Следовательно, задача (2) эквивалента последовательному решению задач (3) в условиях действия формулы

$$\beta_{l+1} = \beta_l + \sqrt{S(y(\beta_l),\beta_l)}, \qquad l = 0,1,...$$

Подход к решению задачи можно оценить, как эффективный в том случае, если задача (3) будет решаться достаточно быстро. Исходя из этих соображений построим численный метод решения задачи (3) в основе, которого лежит нелокальное улучшения функционала [3, 4].

Перепишем задачу (3) в следующем виде

$$S(u) = \frac{1}{2}[(y_0(t_1) - \beta)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i(t_1) - a_i)^2] \to \min, \quad u \in V,$$

$$\dot{y}_i = g_i(u,t), \quad y_i(t_0) = 0, \qquad i = \overline{0,m}.$$

Определим

$$y = (y_0, y_1, ..., y_m), \qquad g = (g_0, g_1, ..., g_m), \qquad a = (\beta, a_1, ..., a_m),$$

с учетом этих обозначений, получим

$$S(u) = \frac{1}{2} < y(t_1) - a, y(t_1) - a > \to \min, \quad u \in V, \tag{4}$$

$$\dot{y} = g(u,t), \quad y(t_0) = 0.$$

Получим формулу приращения функционала $S(u)$ для пары управлений $u, v \in V$ с соответствующими траекториями $y(t, u)$, $y(t, v)$

$$\Delta_v S(u) = < y(t_1,u) - a, \Delta y(t_1) > + \frac{1}{2} < \Delta y(t_1), \Delta y(t_1) > = S_1 + S_2.$$

Приращение $\Delta y = y(t, v) - y(t, u)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\dot{y}(t) = \Delta_{v(t)} g(u(t),t), \quad \Delta y(t_0) = 0.$$

Таким образом, приходим к формуле

$$S_1 = \int_T < y(t_1,u) - a, \ \Delta_{v(t)} g(u(t),t) > dt.$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt} < \Delta y(t), \Delta y(t) >= 2 < \Delta \dot{y}, \Delta y(t) > .$$

Проинтегрировав это условие, получаем

$$S_2 = \int_T < \Delta y(t),\ \Delta_{v(t)} g(u(t), t) > dt.$$

На основании этого, приращение функционала примет вид

$$\Delta_v S(u) = \int_T < p(t, u, y(t, v)),\ \Delta_{v(t)} g(u(t), t) > dt, \qquad (5)$$

где вспомогательная вектор-функция p удовлетворяет условию

$$p(t, u, y) = y(t_1, u) - a + y - y(t, u).$$

Полученная формула (5) дает возможность, используя минимизирующее управление

$$u^*(p, t) = \arg\min_{w \in U} < p, g(w, t) >,$$

построить следующую процедуру.

Процедура улучшения:

1) построим управление $v^*(y, t) = u^*(p(t, u, y), t)$, $y \in R^m$, $t \in T$;

2) найдем решение фазовой системы

$$\dot{y} = g(v^*(y, t), t), \qquad y(t_0) = 0$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(y(t), t)$, $t \in T$.

Управление $v(t)$ удовлетворяет соотношению ($y(t) = y(t, v)$)

$$v(t) = \arg\min_{w \in U} < p(t, u, y(t, v)), g(w, t) >$$

и согласно формуле (5) гарантирует необходимое улучшения: $\Delta_v S(u) \le 0$.

На основании представленной процедуры построим итерационный метод нелокального улучшения функционала.

Пусть $k = 0,1,...$ — номер итерации, $(u^k(t), y^k(t))$ — соответствующая допустимая пара. Построим функционал следующего вида

$$S_\varepsilon(u, u^k) = S(u) + \varepsilon J(u, u^k),\ \varepsilon > 0,$$

здесь $J(u, u^k) = \frac{1}{2} \int_T \| y(t, u) - y^k(t) \|^2\ dt.$

Используя условие уменьшения функционала $S_\varepsilon(u, u^k)$: $\Delta S_\varepsilon(u^{k+1}, u^k) \le 0$ построим управление u^{k+1}. Поэтому получена следующая оценка улучшения

$$S(u^{k+1}) - S(u^k) \le -\varepsilon J(u^{k+1}, u^k). \qquad (6)$$

Построим формулу приращения функционала $S_\varepsilon(u, u^k)$ на паре u^k, u. Имеем

$$\Delta S_\varepsilon(u, u^k) = \Delta_u S(u^k) + \varepsilon J(u, u^k).$$

Построим формулу приращения для $J(u, u^k)$, аналогичную формуле (5).

Пусть $\Delta y^k(t) = y(t, u) - y^k(t)$, $t \in T$. Отсюда получаем уравнение

$$\Delta \dot{y}^k(t) = \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t), \quad \Delta y^k(t_0) = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt} < \Delta y^k(t), \Delta y^k(t) >= 2 < \Delta \dot{y}^k(t), \Delta y^k(t) >, \quad t \in T.$$

Интегрируя по $t \in [t_0, \tau]$, $\tau \in T$ получаем

$$\frac{1}{2} < \Delta y^k(\tau), \Delta y^k(\tau) >= \int_{t_0}^{\tau} < \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) > dt.$$

Следовательно

$$J(u, u^k) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} < \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) > dt d\tau.$$

Таким образом, приходим к итоговому представлению

$$J(u, u^k) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} d\tau < \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) > dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) < \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) > dt.$$

В итоге получено необходимое представление

$$\Delta S_\varepsilon(u, u^k) = \int_T < p_\varepsilon(t, u^k, y(t, u)), \ \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) > dt,$$

$$p_\varepsilon(t, u^k, y) = y^k(t_1) - a + (1 + \varepsilon(t_1 - t))(y - y^k(t)),$$

которое позволяет построить процедуру улучшения управления u^k:

1) построим управление $v^k(y,t) = u^*(p_\varepsilon(t, u^k, y), t)$, $y \in R^m$, $t \in T$;
2) сформируем решение $y^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{y} = g(v^k(y,t), t), \qquad y(t_0) = 0$$

вместе с управлением $u^{k+1}(t) = v^k(y^{k+1}(t), t)$, $t \in T$.

Рассмотрим задачу оптимального управления [5–8]

$$\Phi_0(u) = -\int_0^{t_1} e^{-rt}(cx(t) - u(t))dt \to \min,$$

$$\dot{x} = au(1-x) - bx, \quad x(0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1$$

$$0 \le u(t) \le u^+, \qquad t \in [0, t_1].$$

Задача оптимального управления в основе которой лежит поиск оптимальной рекламной политики компании. Здесь $u(t)$ — затраты на рекламу, $x(t)$ — относительный объем продаж.

Решим представленную задачу при следующих значениях параметров: $r = 1$, $c = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $x^0 = \frac{3}{4}$, $x^1 = \frac{3}{4}$, $u^+ = 1$, $t_1 = 1$.

Для решения задачи применялась представленная выше процедура улучшения функционала. Уменьшения функционала

$$S(u) = \Phi_0(u) + |\Phi_1(u)|, \qquad \Phi_1(u) = x(t_1) - x^1,$$

являлось условием выхода из итерации $u^k \Rightarrow u^{k+1}$.

Таблица 1

Ход метода решения задачи оптимизации

k	$\Phi_0(u^k)$	$\Phi_1(u^k)$
1	–0,56517	$1{,}0216 \cdot 10^{-1}$
2	–0,63163	$2{,}848 \cdot 10^{-2}$
3	–0,52267	$1{,}399 \cdot 10^{-2}$
4	–0,614343	$8{,}65 \cdot 10^{-3}$

Используя предложенный поход к решению задачи оптимального управления с функциональными ограничениями, удалось построить оптимальную стратегию поведения рекламной политики фирмы. Всего за четыре итерации представленной процедуры нелокального улучшения функционала были построены оптимальные затраты на рекламу, которые дают возможность получить максимальную прибыль от реализации рекламируемого продукта.

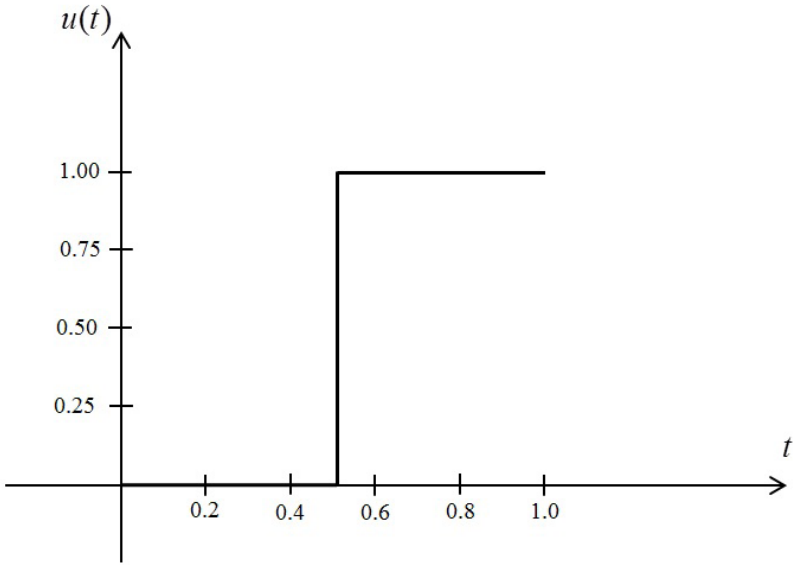

Рис. 1. Оптимальные затраты на рекламу

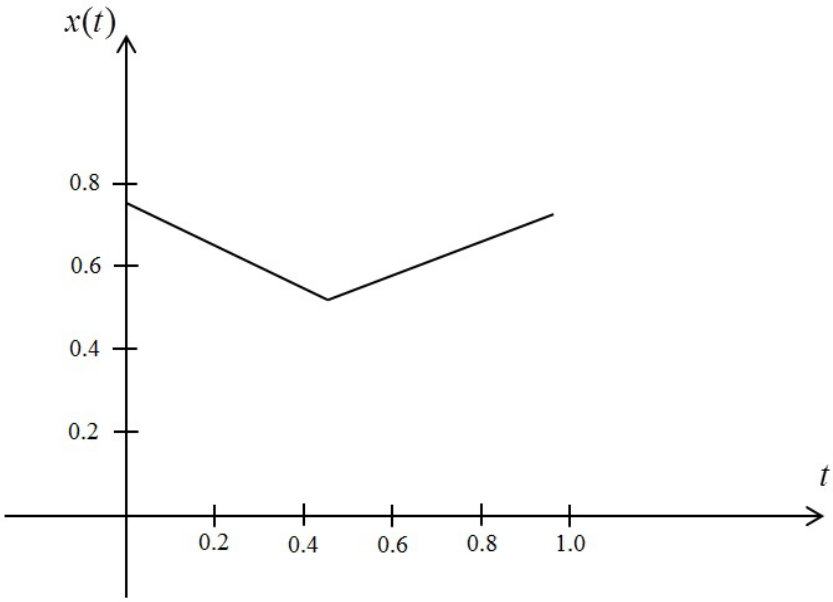

Рис. 2. Оптимальный объем продаж продукции

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — Москва: Наука, 1969. — 384 с.

2. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кирилова. — Москва: Либроком, 2011. — 272 с.

3. Срочко В.А. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала / В.А. Срочко, В.Г. Антоник // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — № 8. — С. 96–102.

4. Srochko V. Sufficient Optimality Conditions for Extremal Controls Based on Functional Increment Formulas / V. Srochko, V. Antonik, E. Aksenyushkina // Numerical Algebra, Control and Optimization. — 2017. — Vol. 7, no. 2. — P. 191–199.

5. Киселев Ю.Н. Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели специального вида / Ю.Н. Киселев, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 12. — С. 1756–1774.

6. Никольский М.С. Упрощенная игровая модель взаимодействия двух государств / М.С. Никольский // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2009. — № 2. — С. 14–20.

7. Антипина Н.В. Влияние инвестиционной составляющей на экономические показатели малых и средних фирм / Н.В. Антипина. — DOI 10.17150/2411-6262.2017.8(2).26 // Baikal Research Journal. — 2017. — Т. 8, № 2. — URL: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=21482.

8. Баенхаева А.В. Исследование оптимального импульсного управления в моделях рекламных расходов / А.В. Баенхаева // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2009. — № 9. — С. 18–21.

REFERENCES

1. Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F. *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 384 p.

2. Gabasov R., Kirillova F.M. *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in optimal control theory]. Moscow, Librokom Publ., 2011. 272 p.

3. Srochko V.A., Antonik V.G. Sufficient optimality conditions for extremal controls based on functional increment formulas. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics*, 2014, no. 8, pp. 96–102. (In Russian).

4. Srochko V., Antonik V., Aksenyushkina E. Sufficient Optimality Conditions for Extremal Controls Based on Functional Increment Formulas. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2017, vol. 7, no. 2, pp. 191–199.

5. Kiselev Y.N., Avvakumov S.N., Orlov M.V. Resource Allocation Problem in a Two-Sector Economic Model of Special Form. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 12, pp. 1756–1774. (In Russian).

6. Nikolskii M.S. A Simplified Game Model of the Interaction Between Two Countries. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naya matematika i kibernetika = Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2009, no. 2, pp. 14–20. (In Russian).

7. Antipina N.V. Influence of Investment Constituent on Economic Indicators of Small and Medium-Sized Firms. *Baikal Research Journal*, 2017, vol. 8, no. 2. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(2).26. Available at: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=21482. (In Russian).

8. Baenkhaeva A.V. The Research of Optimal Impulsive Control in the Model of Advertising Expenditure. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika = Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics*, 2009, no. 9, pp. 18–21. (In Russian).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Аксенюшкина Елена Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий,

Байкальский государственный университет, Российская Федерация, г. Иркутск, e-mail: aks.ev@mail.ru.

Аксенюшкин Александр Владимирович — аспирант, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, Российская Федерация, г. Иркутск, e-mail: alekshd@gmail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena V. Aksenyushkina— PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal state University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: aks.ev@mail.ru.

Alexander V. Aksenyushkin— Graduate Student of the Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal state University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: alekshd@gmail.ru.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ

Аксенюшкина Е.А. Оптимизации рекламной стратегии компании / Е.А. Аксенюшкина, А.В. Аксенюшкин // System Analysis & Mathematical Modeling.— 2020.— Т. 2, № 3.— С. 9–17.

FOR CITATION

Aksenyushkina E.A., Aksenyushkin A.V. Optimization of the Company's Advertising Strategy. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2020, vol. 2, no. 3, pp. 9–17. (In Russian).